

Derivada de Funciones de una Variable Real

Efraín Martínez M.

20 de julio de 2009

Resumen

La derivada como razón de cambio uno de los capítulos mas importantes del cálculo diferencial e integral, probablemente con mayor aplicación en diferentes ramas de la ingeniería, economía, etc.

1. Derivada de funciones de una variable

Definición 1. Sea, $y = f(x)$ función definida en $S \subset \mathbb{R}$ abierto, $x \in S$, Δx incremento en x tal que $(x + \Delta x) \in S$. Limite si existe en la recta real ampliada de $\alpha(\Delta x) = \Delta y/\Delta x$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se llama derivada de $y = f(x)$. Se denota como dy/dx , $f'(x)$ y' , f' , Df , \dot{y} , etc., y se lee derivada de y respecto a x , esto es:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. Reglas de derivación

Si, $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ funciones de x y a a, b, c, n constantes, entonces

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{d}{dx}(c) &= 0 & (8) \quad \frac{d}{dx}(cu) &= c \frac{du}{dx} \\
 (2) \quad \frac{d}{dx}(x) &= 1 & (9) \quad \frac{d}{dx}(uv) &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \\
 (3) \quad \frac{d}{dx}(cx) &= c & (10) \quad \frac{d}{dx}(uvw) &= vw \frac{du}{dx} + uw \frac{dv}{dx} + uv \frac{dw}{dx} \\
 (4) \quad \frac{d}{dx}(x^n) &= nx^{n-1} & (11) \quad \frac{d}{dx} \left(\prod_{i=1}^n u_i \right) &= \sum_{i=1}^n \left[\prod_{j=1, j \neq i}^n (u_j) \frac{du_i}{dx} \right] \\
 (5) \quad \frac{d}{dx} \left(x^{p/q} \right) &= \frac{p}{q} x^{p/q-1} & (12) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) &= \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \\
 (6) \quad \frac{d}{dx} (u \pm v \pm w) &= \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} & (13) \quad \frac{d}{dx} (u^n) &= nu^{n-1} \frac{du}{dx} \\
 (7) \quad \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^n u_i \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{du_i}{dx} & (14) \quad \frac{d}{dx} \left(u^{p/q} \right) &= \frac{p}{q} u^{p/q-1} \frac{du}{dx}
 \end{aligned}$$

$$(15) \quad \frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{derivada de función compuesta}$$

$$(16) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad y = f(u) \quad y \quad u = g(x) \quad \text{regla de la cadena}$$

$$(17) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \quad y = f(u), u = g(v), v = g(x) \quad \text{regla de la cadena}$$

$$(18) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \text{derivada de funciones inversas}$$

$$(19) \quad \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) \end{vmatrix}$$

⋮

$$(20) \quad \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{21}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{i1}(x) & \cdots & f'_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{21}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \end{vmatrix}$$

3. Derivada de funciones trigonométricas

$$(21) \quad \frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$(24) \quad \frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

$$(22) \quad \frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$(25) \quad \frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$(23) \quad \frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$(26) \quad \frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

4. Derivada de funciones trigonométricas inversas

$$(27) \quad \frac{d}{dx} \arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad -\frac{\pi}{2} < \arcsin u < \frac{\pi}{2}$$

$$(28) \quad \frac{d}{dx} \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad 0 < \arccos u < \pi$$

$$(29) \quad \frac{d}{dx} \arctan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan u < \frac{\pi}{2}$$

$$(30) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \quad 0 < \operatorname{arccot} u < \pi$$

$$(31) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} u = \frac{\pm 1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \quad + Si, 0 < \operatorname{arcsec} u < \frac{\pi}{2}, \quad -Si, \frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} u < \pi$$

$$(32) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} u = \frac{\mp 1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \quad + Si, 0 < \operatorname{arccsc} u < \frac{\pi}{2}, \quad -Si, \frac{-\pi}{2} < \operatorname{arccsc} u < 0$$

5. Derivada de funciones exponenciales y logarítmicas

$$(33) \quad \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$(36) \quad \frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$(34) \quad \frac{d}{dx} \log u = \frac{\log e}{u} \frac{du}{dx}$$

$$(37) \quad \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$(35) \quad \frac{d}{dx} \log_a u = \frac{\log_a e}{u} \frac{du}{dx} \quad a \neq 0, 1$$

$$(38) \quad \frac{d}{dx} u^v = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$$

6. Derivada de funciones hiperbólicas

$$(39) \quad \frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx} \qquad (42) \quad \frac{d}{dx} \coth u = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$(40) \quad \frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx} \qquad (43) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$$

$$(41) \quad \frac{d}{dx} \tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx} \qquad (44) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

7. Derivada de funciones hiperbólicas inversas

$$(45) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{argsinh} u = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \frac{du}{dx}$$

$$(46) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{argcosh} u = \frac{\pm 1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx} \quad + Si, \cosh^{-1} u > 0, u > 1, \quad -Si, \cosh^{-1} u < 0, u > 1$$

$$(47) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{argtanh} u = \frac{1}{1 - u^2} \frac{du}{dx} \quad -1 < u < 1$$

$$(48) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{argcoth} u = \frac{1}{1 - u^2} \frac{du}{dx} \quad u > 1 \text{ o } u < -1$$

$$(49) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{argsech} u = \frac{\mp 1}{u\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx} \quad -Si, \operatorname{sech}^{-1} u > 0, \quad +Si, \operatorname{sech}^{-1} u < 0, \quad 0 < u < 1$$

$$(50) \quad \frac{d}{dx} \operatorname{argcsch} u = \frac{-1}{|u|\sqrt{1 + u^2}} \frac{du}{dx} = \frac{\mp 1}{u\sqrt{1 + u^2}} \frac{du}{dx} \quad -Si, u > 0 \quad +Si, u > 0$$

8. Derivada de funciones paramétricas

Definición 2. Si, $y = f(t)$, $x = g(t)$ son funciones continuas de t , tal que $g'(t) \neq 0$. Se define a:

$$\begin{cases} y=f(t) \\ x=g(t) \end{cases}$$

función paramétrica, t parámetro. Si, $y = f(g^{-1}(x))$ en alguna región, entonces derivada de función compuesta establece que:

$$(51) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \text{primera derivada}$$

$$(52) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3} \quad \text{segunda derivada}$$

$$(53) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx} \right) \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{d^{n-1} y}{dx}}{\frac{dx}{dt}} \right) \quad \text{n-ésima derivada}$$

9. Derivada de funciones implícitas

Definición 3. Si, $F(x, y) = 0$ es una función implícita, $y = y(x)$ diferenciable, entonces la derivada de $F(x, y) = 0$ se obtiene a partir de: $\frac{d}{dx} F(x, y) = 0$, considerando a $F(x, y)$ función compuesta de x , esto es:

$$(54) \quad \frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\delta F}{\delta y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \& \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \quad \text{primera derivada}$$

$$(55) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta F}{\delta x} + \frac{\delta F}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx} \right) = 0 \quad \text{derivada segunda}$$

$$(56) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-\frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \left(\frac{\delta F}{\delta y} \right)^2 + 2 \frac{\delta^2 F}{\delta x \delta y} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^3} \quad \text{derivada segunda}$$

10. Diferenciales

Sea, $y = f(x)$ función definida en S , $x \in S$, Δx incremento en x tal que $x + \Delta x \in S$. Se dice que $y = f(x)$ es diferenciable en x , entonces

$$(57) \quad dy = f'(x) dx \quad dy \approx \Delta y \quad \text{cuando} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

11. Error absoluto y relativo

Al calcular $y = f(x)$, si el valor de x no es exacto, el valor de y tampoco será exacto y vendrá afectado por un error Δx . Por tanto: Δx es el error absoluto en la determinación de x , y Δy es el error absoluto al calcular y . Si, Δx y Δy son suficiente mente pequeños se pueden aproximar por dx y dy , y están dadas por:

$$(58) \quad \Delta y = y' \cdot \Delta x \quad \text{Error absoluto}$$

$$(59) \quad \frac{\Delta y}{y} = \frac{y'}{y} \cdot \Delta x \quad \text{Error relativo}$$

$$(60) \quad \frac{\Delta y}{y} \cdot 100 \quad \text{Tanto por ciento de error relativo}$$

12. Diferenciales de funciones elementales

$$(61) \quad d(c) = 0$$

$$(62) \quad d(cx) = cdx$$

$$(63) \quad d(cx^n) = ncx^{n-1}dx$$

$$(64) \quad d(u \pm v \pm w) = du \pm dv \pm dw$$

$$(65) \quad d(cu) = cdu$$

$$(66) \quad d(uv) = u dv + v du$$

$$(67) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

$$(68) \quad d(u^n) = nu^{n-1}du$$

13. Diferenciales de funciones trigonométricas

$$(69) \quad d(\sin u) = \cos u du$$

$$(70) \quad d(\cos u) = -\sin u du$$

$$(71) \quad d(\tan u) = \sec^2 u du$$

$$(72) \quad d(\cot u) = -\csc^2 u du$$

$$(73) \quad d(\sec u) = \sec u \tan u du$$

$$(74) \quad d(\csc u) = -\csc u \cot u du$$

14. Diferenciales de funciones exponenciales y logarítmicas

$$(75) \quad d(\ln u) = \frac{1}{u} du$$

$$(76) \quad d(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u} du \quad a \neq 0, 1$$

$$(77) \quad d(a^u) = a^u \ln a du$$

$$(78) \quad d(e^u) = e^u du$$

$$(79) \quad d(u^v) = vu^{v-1} du + u^v \ln u dv$$

15. Derivadas de orden superior

$$(80) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = f''(x) = y'' \quad \text{derivada segunda}$$

$$(81) \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = f'''(x) = y''' \quad \text{derivada tercera}$$

$$(82) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}} \right) = f^{(n)}(x) = y^{(n)} \quad \text{derivada n-ésima}$$

16. Regla de Leibnitz

$$(83) \quad \frac{d^n}{dx^n}(uv) = \frac{d^n u}{dx^n} v + \frac{n}{1!} \frac{d^{(n-1)} u}{dx^{(n-1)}} \frac{dv}{dx} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{d^{(n-2)} u}{dx^{(n-2)}} \frac{d^2 v}{dx^2} + \cdots + u \frac{d^n v}{dx^n}$$

$$(84) \quad D^n(uv) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (D^k u)(D^{n-k} v)$$

$$(85) \quad \frac{d^2}{dx^2}(uv) = \frac{d^2 u}{dx^2} v + 2 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + u \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$(86) \quad \frac{d^3}{dx^3}(uv) = \frac{d^3 u}{dx^3} v + 3 \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{dv}{dx} + 3 \frac{du}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} + u \frac{d^3 v}{dx^3}$$

17. Diferenciales de orden superior

$$(87) \quad d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = f''(x)dx^2$$

$$(88) \quad d^3 y = d(d^2 y) = d(f''(x)dx^2) = f'''(x)dx^3$$

⋮

$$(89) \quad d^n y = d(d^{(n-1)} y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{(n-1)}) = f^{(n)}(x)dx^n$$

Cualquier error es responsabilidad del autor ¹, favor sugerencias a la dirección que aparece en pie de página, gracias.

¹E-Mail: eframath@hotmail.com; SitioWeb: <http://www.eframath.com>